

## Uporaba mehanike tekočin pri opisu pretakanja krvi po žilah Use of fluid mechanics in blood flow description

Veronika Kralj - Iglič\*, Janez Kirbiš\*\*

Ključne besede  
ateroskleroza  
krvni pretok hitrost  
biofizika

Key words  
atherosclerosis  
blood flow velocity  
biophysic

**Izvleček.** Predstavljene so fizikalne osnove opisa pretakanja tekočine po sistemu cevi in nekatere mehanske lastnosti pretakanja krvi po žilah. Kot primer je prikazano hitrostno polje toka skozi model vertebro-bazilarnega stika. Predstavljen je vpliv nekaterih geometrijskih parametrov na tok krvi in s tem na nastajanje aterosklerotičnih sprememb, kar utemeljuje pomen študija biomehanskih lastnosti srca, ožilja in krvi pri načrtovanju najboljšega načina zdravljenja bolezni tega sistema.

**Abstract.** Physical principles of the description of fluid flow through a system of pipes and some mechanical properties of the blood circulation are put forward. As an example, the velocity field of the model vertebro-basilar junction is presented. The influence of some geometrical parameters on the blood flow and on the development of atherosclerotic changes is shown, proving thereby the importance of studying the biomechanical properties of the cardiovascular system in optimization of the treatment of the disorders of this system.

### Opis gibanja tekočine

Ena od lastnosti, ki ločujejo snovi med sabo, je način, na kakršen se le-ta pod vplivom zunanje sile deformira, oziroma, v kolikšni meri se snov upira deformaciji. V tem smislu lahko snovi razvstimo od Evklidovega trdnega idealno togega telesa, katerega odpor je neskončno velik, do Pascalove idealne tekočine, ki se sploh ne upira deformaciji. V tem delu posvečamo pozornost tekočini, ki jo obravnavamo kot snov, ki se pod vplivom zunanje sile kontinuirano in nepovratno deformira. Tekočina se zato giblje.

Opisujemo gibanje tekočine. Zamislimo si, da je tekočina sestavljena iz majhnih delcev, ki interagirajo med seboj in z okolico. Tekočinski delci so tesno drug ob drugem, tako da sestavljajo kontinuum. V vsakem od tekočinskih delcev je kljub temu zelo veliko molekul, ki lahko tudi prehajajo iz enega tekočinskega delca v drugega. V nekem trenutku opišemo določeno makroskopsko lastnost tekočine (npr. gostoto, hitrost, tlak) tako, da podamo njeno vrednost za vse tekočinske delce, ki sestavljajo kontinuum. Pravimo tudi, da podamo polje te količine.

Pri opisovanju gibanja tekočine je najbolj pomembno hitrostno polje  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , kjer je  $\mathbf{r}$  (radij) vektor, ki povezuje koordinatno izhodišče in opazovano točko,  $t$  pa čas. Če poznamo hitrostno polje, lahko določimo tudi ustrezen tlak v sistemu in pretok skozi izbran prostorninski element.

\*Doc. dr. Veronika Kralj – Iglič, dipl. ing. fizike, Inštitut za biofiziko, Medicinska fakulteta, Lipičeva 2, 1000 Ljubljana.

\*\*Asist. mag. Janez Kirbiš, dr. med., Klinika za kirurgijo srca in ožilja, Klinični center, Zaloška 7, 1000 Ljubljana.

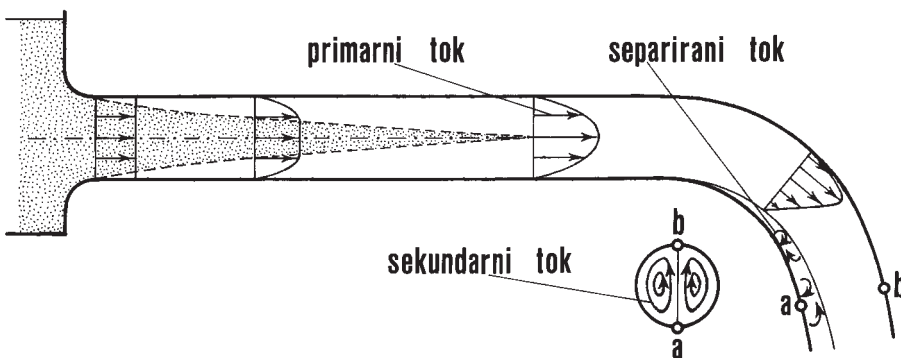
## Tok tekočine po cevi

Najprej obravnavamo tok nestisljive tekočine po okrogli ravni cevi, ki ima povsod enak presek. Predpostavimo, da je cev popolnoma napolnjena s tekočino in da tok poganja padanje tlaka vzdolž cevi. Tik ob steni cevi tekočina miruje, proti sredini cevi pa njena hitrost narašča. Cev je osnosimetrična, tekočinski delci, ki sestavljajo valjasto plast, pa se gibljejo z enako hitrostjo. Toku, pri katerem se tekočinski delci gibljejo urejeno drug ob drugem, pravimo, da je laminaren.

Hitrosti valjastih plasti se med seboj razlikujejo. Zaradi razlik v velikosti hitrosti med posameznimi plastmi delujejo v viskozni tekočini strižne sile. Strižna sila, ki deluje na izbran valjast del tekočine, prijemlje na plašču valja in ima smer nasprotno smeri gibanja tekočine. Sorazmerna je površini valjaste plasti in razliki hitrosti sosednjih plasti, sorazmernostnemu količniku pa pravimo viskoznost tekočine.

Ko tekočina vstopi v ravno okroglo cev s stalnim presekom, ima pri laminarnem toku hitrost vseh plasti isto smer, velikost hitrosti pa je enakomerno porazdeljena po preseku cevi (slika 1). Pravimo, da je hitrostni profil enakomeren. Zaradi viskoznosti se tekočina tik ob steni cevi prilepi nanjo. Tako se ustvari tanka mejna plast tekočine, v kateri so učinki viskoznosti pomembni (svetlo območje na sliki 1). Vzdolž toka se mejna plast širi, hitrostni profil pa se spreminja, dokler ne doseže svoje končne oblike v ravni cevi (slika 1). Takrat je tok popolnoma razvit. Če je cev debela, pri popolnoma razvitem toku mejna plast zavzema samo majhen del cevi ob steni, če je tanka, pa je mejna plast razširjena po vsej debelini cevi.

Hitrostni profil ostane nespremenjen, če ni motenj toka (npr. zavoji ali ovire). Pravimo, da je takrat tok stacionaren. To pomeni, da se na nekem kraju makroskopske količine, kot so hitrost, tlak in temperatura, s časom ne spreminjajo. Tok je stacionaren, dokler ne pride do spremembe v geometriji cevi ali do ovir. Medtem ko se tekočina giblje vzdolž



Slika 1. Razvoj toka vzdolž cevi. Prisotnost temnega območja po vstopu v cev označuje področje, kjer tok še ni razvit. Sledi območje popolnoma razvitega toka, dokler ne pride spet do spremembe geometrije zaradi zavoja cevi. Prikazani sta tudi območji sekundarnega toka in separiranega toka zaradi spremembe geometrije cevi.

cevi, pride v tem primeru do gibanja tekočine tudi prečno na smer primarnega toka. Pravimo, da lahko pride do nastanka sekundarnih in separiranih tokov. Na sliki 1 je prikazan nastanek sekundarnega toka, sestavljenega iz dveh vrtincev, in separiranega toka, ki ga predstavlja počasno in neurejeno gibanje tekočine ob steni cevi.

### Poiseuille-Hagenov tok

Zanimata nas hitrostno polje in prostorninski pretok popolnoma razvitega stacionarnega laminarnega toka viskozne nestisljive tekočine po ravni okrogli cevi s stalnim presekom. Cev je tako tanka, da je mejna plast razširjena po vsej debelini cevi. Viskoznost tekočine naj bo neodvisna od hitrosti tekočine. Tok z naštetimi lastnostmi imenujemo Poiseuille-Hagenov tok. Zanj lahko dobimo preprosto analitično odvisnost velikosti hitrosti od oddaljenosti od sredine cevi  $v(r)$  in analitičen izraz za prostorninski pretok  $\Phi_v$ , (3, 5)

$$v(r) = v_0 \left( 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \quad (1)$$

kjer je  $v_0 = \frac{\Delta p r_0^2}{4\eta l}$  in

$$\Phi_v = \frac{\Delta p \pi r_0^4}{8\eta l} \quad (2)$$

$\Delta p$  je razlika tlakov na začetku in na koncu cevi,  $r_0$  je polmer cevi,  $\eta$  je viskoznost tekočine,  $l$  pa je dolžina cevi. Hitrost parabolčno pada od največje vrednosti v sredini cevi  $v_0$  v smeri proti steni cevi, kjer tekočina miruje. Enačbo (2) imenujemo Poiseuilleov zakon. Iz Poiseuilleovega zakona sledi, da je padec tlaka vzdolž cevi sorazmeren prostorninskemu toku. Sorazmernostnemu količniku, ki je odvisen od oblike cevi in lastnosti tekočine, pravimo pretočni upor  $R_\eta$ ,

$$R_\eta = \frac{8\eta l}{\pi r_0^4} \quad (3)$$

Iz (2) in (3) sledi

$$\Delta p = R_\eta \Phi_v \quad (4)$$

Zveza (4) je analogna Ohmovemu zakonu, ki povezuje električno napetost  $U$  in električni tok  $I$ ,

$$U = R I \quad (5)$$

kjer sorazmernostni količnik  $R$  označuje električni upor. Če primerjamo (4) in (5) vidimo, da je tlačna razlika  $\Delta p$  analogna električni napetosti  $U$ , prostorninski tok tekočine  $\Phi_V$  je analogen električnemu toku  $I$ , pretočni upor  $R_\eta$  pa električnemu uporu  $R$ . Analogijo z električnim tokom lahko koristno uporabimo pri obravnavanju toka skozi sistem, sestavljen iz več različnih cevi, če pri tem velja, da so pri toku skozi vsako teh cevi izpolnjeni pogoji za Poiseuille-Hagenov tok.

## Krvni obtok

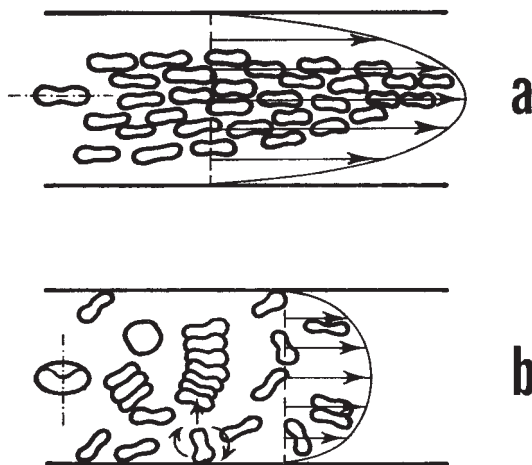
Poiseuille-Hagenov tok je posebej preprost sistem, za katerega lahko iz zakona gibanja dobimo analitična izraza za hitrostni profil (1) in prostorninski tok (2). Če pa opustimo nekatere omejitve, ki določajo Poiseuille-Hagenov tok (obravnavamo še drugačne oblike cevi, časovno odvisne pojave, upoštevamo razen strižnih sil zaradi viskoznosti tekočine še vplive drugih sil, obravnavamo tudi stisljive tekočine), in zapišemo zakone gibanja za sistem, pa ponavadi ne moremo dobiti analitičnih izrazov za hitrost in ostale količine, ki nas zanimajo. V takih primerih enačbe, ki izhajajo iz zakonov gibanja, rešimo numerično.

Pri opisu realnega sistema nas zanima, kako se teoretične napovedi ujemajo z opažanji. Obravnavamo sistem, ki je pomemben pri vzdrževanju življenjskih funkcij – krvni obtok. Krvni obtok je zaključen sistem, katerega glavna naloga je, da prinaša tkivom hranljive snovi (kisik, ogljikove hidrate, aminokisliline, maščobe, hormone in snovi imunskega odziva) in odnaša odpadne snovi, ki izhajajo iz presnove tkiv. Črpalka krvnega obtoka je srce. Srce poganja kri v arterije, ki se delijo na manjše arterije, arteriole in preko predkapilarnih sfinktrov v kapilare, kjer poteka izmenjava snovi s tkivi. Kapilare se potem združujejo v venule, majhne vene in večje vene, ki dovajajo kri v srce. Hitrost krvi je največja v velikih žilah. Z deljenjem arterij se njihov polmer manjša, njihovo število pa večja, tako da se skupni presek večja, hitrost krvi pa manjša. V aorti je povprečna hitrost krvi približno 0,2 m/s, v kapilari pa približno  $3 \times 10^{-4}$  m/s (1).

Zanima nas, v kolikšni meri so za pretakanje krvi po žilah izpolnjeni pogoji, ki določajo Poiseuille-Hagenov tok.

Na nekaterih mestih sicer lahko opišemo geometrijo žil z ravno okroglo cevjo s stalnim presekom, upoštevati pa moramo, da je krvni obtok razvejan sistem, da žile nimajo povesod okroglega preseka, da pride do razvejišč in stikov žil ter da pride v obtoku do zavojev ali kakih drugih sprememb v geometriji.

Viskoznost krvi ni povesod v obtoku neodvisna od hitrosti krvi. Kri opišemo kot vodno raztopino nizkomolekularnih organskih in anorganskih snovi in beljakovin, v kateri plavajo krvne celice in lipoproteini. Rdeče krvne celice (eritrociti) so dovolj velike in številne, da njihova prisotnost pomembno vpliva na mehanske lastnosti normalne krvi (2). Zaradi prisotnosti eritrocitov viskoznost normalne krvi pri dani temperaturi ni stalna, pač pa je med drugim odvisna od hitrosti gibanja krvi in prostorninskega deleža eritrocitov. Meritve kažejo (2), da se pri velikih hitrostih krvi eritrociti gibljejo po sredini žil (slika 2a), kjer so strižne sile med celicami in plazmo najmanjše, viskoznost krvi pa skoraj neodvisna od hitrosti krvi. Celice zaradi sil, s katerimi tekočina deluje nanje, zavzamejo prolatno



Slika 2. Gibanje eritrocitov v žili pri velikih hitrostih krvi (a) in pri majhnih hitrostih krvi (b). Vidimo, da pri majhnih hitrostih krvi pride do nastanka skupkov eritrocitov. Črtkani črti označujejo ustrezni rotacijski osi celice.

obliko (obliko, podobno cigari), kar je naznačeno z rotacijsko osjo na sliki 2a. Pri majhnih hitrostih so eritrociti bolj enakomerno porazdeljeni po preseku žile (slika 2b), njihova oblika pa je oblatna (podobna krofu). Poveča se verjetnost interakcij med celicami, zato se tvorijo skupki (4) in viskoznost naraste (2).

Tok skozi žile ni povesod stacionaren. Srce črpa kri v obliki pulzov, kar se prenaša tudi na žile, ki imajo zaradi svoje strukture elastične lastnosti. Te se vzdolž obtoka spreminjajo, kar omogoča, da je tok skozi kapilare, kjer poteka izmenjava snovi s tkivi, kar se da počasen in stacionaren.

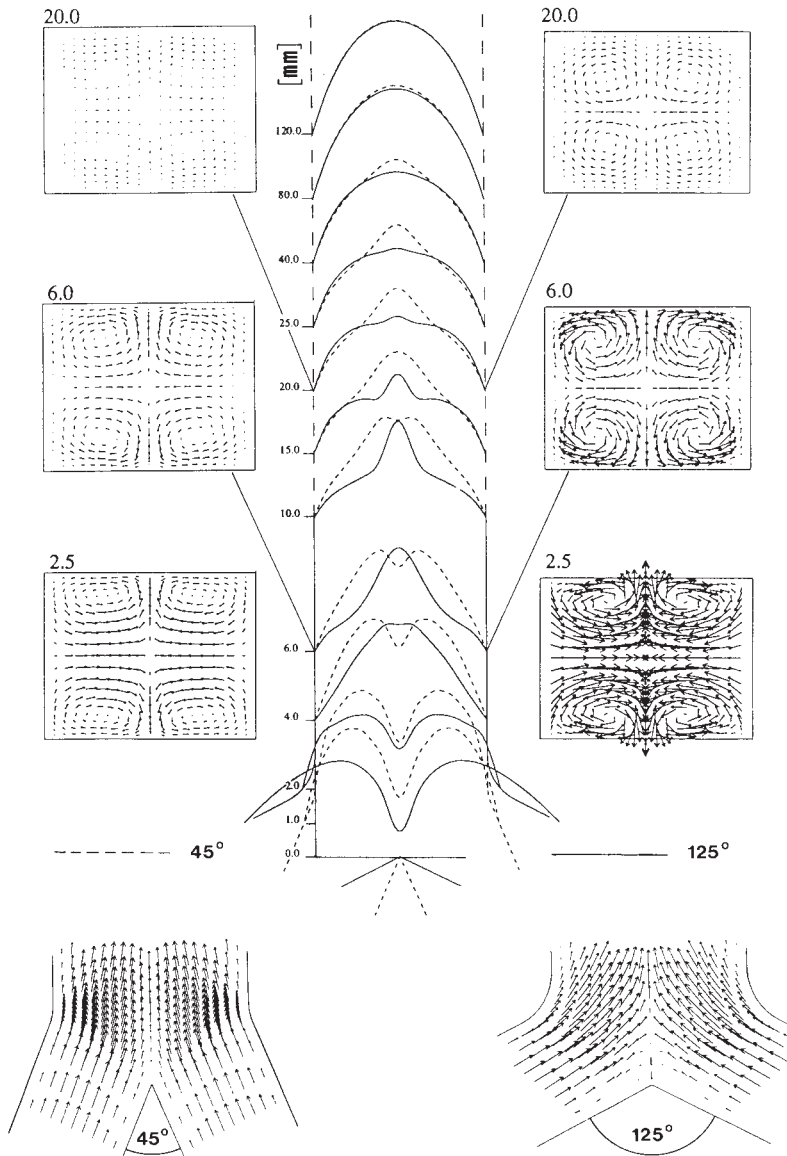
Ugotovimo tudi, da je tok krvi v žilah pretežno laminaren, kar pa ne velja v velikih arterijah in venah, pa tudi v okolici razvejišč, kjer se lahko pojavijo območja separiranih tokov in sekundarni tokovi, ki jih sestavljajo vrtinci (2). Pravimo, da je tok tam turbulenten.

Poiseuilleov zakon uporabimo, če nam zadostuje groba ocena in opis nekaterih kvalitativnih lastnosti sistema. Pove nam, da je pri uravnavanju pretoka krvi skozi žile najbolj učinkovita sprememba polmera žile. Na osnovi Poiseuilleovega zakona (2) ocenimo, da pri dani tlačni razliki  $\Delta p$  sprememba polmera žile  $r$  za 1 % povzroči spremembo prostorninskega pretoka krvi  $\Phi_v$  za 4 %. Obratno, če neki organ potrebuje določeno količino krvi za svojo funkcijo, je tlačna razlika, ki je potrebna, da črpa to količino krvi, odvisna od polmera žil. Za določen prostorninski pretok zmanjšanje polmera žil za 1 % povzroči 4 % povečanje tlačne razlike. Visok arterijski tlak je navadno povezan z zoženjem žil, lahko pa vplivamo nanj tako, da s sproščanjem gladkih mišic v žilni steni povečamo polmer žil. Drug pomemben način zmanjšanja pretočnega upora žil predstavlja zmanjšanje viskoznosti krvi.

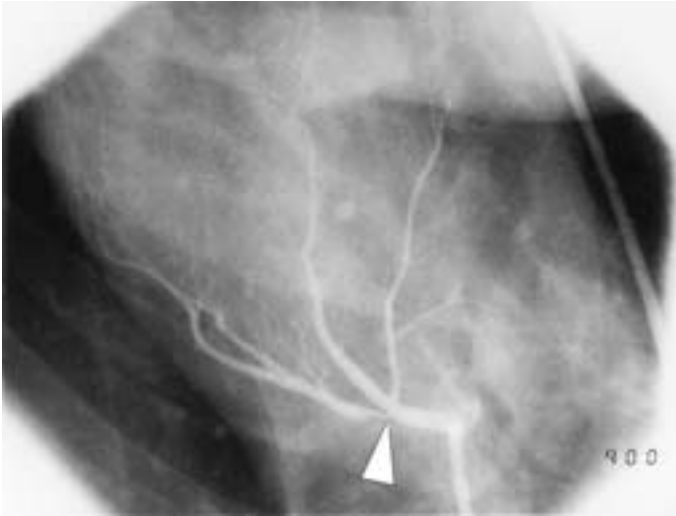
Pri obravnavanju pojavov, pri katerih je pomembno turbulentno pretakanje krvi, sestava krvi v žilah, časovno odvisni pojavi in elastične lastnosti žil, izhajamo iz splošnejših zakonov gibanja. Izkaže se, da lahko ti pojavi vplivajo na nekatere pomembne funkcije krvnega obtoka. Ugotovili so, da v arterijah v bližini razvejišč in stikov pride do aterosklerotičnih poškodb žil in do nastajanja krvnih strdkov (6). Strdek lahko zamaši žilo na mestu, kjer je nastal, lahko pa se tudi odtrga, potuje s krvnim obtokom in zamaši katero od življenjsko pomembnih žil. Vzrok nastanka in razvoja krvnih strdkov je delno znan, dosedanja opažanja pa kažejo, da pri tem igrajo pomembno vlogo tudi mehanske lastnosti krvi in žil, ki vplivajo na tok krvi v okolici spremenjene geometrije (6).

Kot primer obravnavamo tok skozi vertebro-bazilarni stik. Bazilarna arterija, ki nastane z združitvijo dveh vertebralnih arterij, preskrbuje krvni obtok možganov. Stični kot, pod katerim se arteriji združita, variira pri človeku med  $10^\circ$  in  $160^\circ$  (6). Meritve in teoretične napovedi (6) kažejo, da velikost stičnega kota pomembno vpliva na hitrostno polje toka krvi skozi stik. Hitrostno polje je bilo izmerjeno na modelu izdelanem iz pleksi-stekla, ki ima podobna razmerja in velikost kot vertebro-bazilarni stik pri človeku, in izračunano za ta model z uporabo metode končnih elementov (6). Na sliki 3 sta prikazana tako dobljeno hitrostno polje in hitrostni profil primarnega toka skozi modelni vertebro-bazilarni stik pri dveh stičnih kotih:  $45^\circ$  in  $125^\circ$ . Na sliki 3 je v sredini prikazano spreminjanje hitrostnega profila primarnega toka v frontalnem prerezu skozi modelno bazilarno arterijo, spodaj je prikazano ustrezno hitrostno polje tik ob stiku, ob straneh pa je prikazano hitrostno polje sekundarnega toka vzdolž modelne bazilarne arterije pri treh različnih oddaljenostih od stika. Presek modelnih arterij je pravokoten, kar pa ne predstavlja pomembnih razlik v hitrostnem polju, ki nas zanima (6). Dolžina puščice predstavlja velikost hitrosti, smer puščice pa smer hitrosti. Vidimo, da oblika hitrostnega profila na dovolj veliki oddaljenosti od stika postaja podobna parabolični pri obeh stičnih kotih. Če je stični kot večji, pride do tega kasneje, kot če je manjši. Na stiku pride zaradi spremembe v geometriji cevi do nastanka sekundarnega toka, ki ga tvorijo štirje vrtinci. Sekundarni tok zamre vzdolž primarnega toka. Pri velikih stičnih kotih je sekundarni tok močnejši in se ohranja dlje. V bližini stika nastane separirani tok, ki ima lahko tudi nasprotno smer od primarnega. Ta pojav je bolj izrazit pri večjem stičnem kotu.

Študij aterosklerotičnih poškodb žil vertebro-bazilarnega stika kaže, da je več aterosklerotičnih poškodb žil pri večjih stičnih kotih, ki predstavljajo večje spremembe v geometriji. Podobne pojave so opazili tudi na mestih večjih sprememb v geometriji drugih žil, predvsem v okolici razvejišč arterij. Slika 4 prikazuje zoženje koronarne arterije, ki preskrbuje srčno mišico z arterijsko krvjo. Zaradi zoženja koronarne arterije del srčne mišice ni dovolj prekravljen. Vidimo, da je tudi v tem primeru prišlo do aterosklerotične poškodbe v bližini razvejišča, kjer nastanejo sekundarni in separirani turbulentni tokovi. Možnost zdravljenja pri zoženju ali pri zamašitvi arterije predstavlja premostitev z naravno ali pa z umetno žilno protezo. Ker je za nadaljnji razvoj aterosklerotičnih poškodb žil in za nastajanje krvnih strdkov pomembno hitrostno polje tekočine in s tem geometrija sistema, je koristno poseg načrtovati tako, da je hitrostno polje najugodnejše. Pri tem se zavedamo, da so modeli, s katerimi opisujemo dogajanje v krvnem obtoku, omejeni s poenostavitvami. Na tej stopnji razvoja zato ne moremo zadovoljivo opisati



Slika 3. Hitrostni profil toka skozi vertebro-bazilarni stik ter hitrostni polji primarnega in sekundarnega toka, za dva različna stična kota 45° in 125°, kot je označeno (6). Polje primarnega toka je podano v frontalnem prerezu skozi sredino bazilarne arterije, polje sekundarnega toka pa v prerezu pravokotno na smer primarnega toka, pri čemer je označena oddaljenost preseka od stika (v mm). Dolžina puščice predstavlja velikost hitrosti, smer puščice pa smer hitrosti tekočine.



Slika 4. Rentgenogram koronarne arterije po vbrizganju radioaktivnega kontrastnega sredstva. Vidno je zoženje arterije v okolici razvejišča.

in predvideti vseh relevantnih pojavov. Upamo pa, da bo nadaljevanje raziskovanja v tej smeri pripomoglo k boljšemu razumevanju teh pojavov in s tem tudi k bolj učinkovitemu zdravljenju bolezni srca in ožilja.

---

#### Literatura

1. Berne RM, Levy MN. *Cardiovascular Physiology*. St. Louis: Mosby, 1986: 1–4.
2. Caro CG, Pedley TJ, Schroter RC, Seed WA. *The mechanics of circulation*. New York: Oxford, 1978: 171–80.
3. Kladnik R. *Visokošolska fizika. 1. del, Mehanski in toplotni pojavi*. Ljubljana: Državna založba Slovenije, 1989: 166–8.
4. Löb W. *Einführung in die Biochemie*. Leipzig, 1911: 66.
5. Munson BR, Young DF, Okiishi TH. *Fundamentals of fluid mechanics*. New York: John Wiley & Sons Inc., 1994: 455–534.
6. Ravensbergen J, Krijger JKB, Hillen B, Hoogstraten HW. The influence of the angle of confluence on the flow in a vertebro-basilar junction model. *J Biomech*, 1996, 29: 281–99.

Prispelo 10. 6. 1997